Séries de Fonctions

I – Convergence Simple,Convergence Uniforme, Convergence Normale :

Définition :
Soit $\forall\ n \in\ N$, u_n : I→K (I est un intervalle). On dit qu'une série de fonctions $\Sigma\ u_n$ converge simplement sur I (ou converge sur I) de somme la fonction S si et seulement si : $\forall\ x \in\ I$ la série réelle ou complexe $\Sigma\ u_n(x)$ converge de somme S(x).

Remarque :

On pose : $\forall\ n \in\ N, \forall\ x \in\ I\ , S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k\ (x)$.

(La série de fonctions $\Sigma\ u_n$ converge simplement de somme S)
↔ ($\forall\ x \in\ I\ , \Sigma\ u_n(x)$ converge de somme S(x))
↔ ($\forall\ x \in\ I$, la suite $(S_n(x))$ converge de limite S(x))
↔ (La suite de fonctions (S_n) converge simplement vers S)

Définition :
Soit $\forall\ n \in\ N$, un : I→K. On dit que la série de fonctions $\Sigma\ u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite (S_n) converge uniformément.
↔ ($\| S_n - S \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
↔ ($\| R_n \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

Propriété :
Si la série de fonctions $\Sigma\ u_n$ converge uniformément, alors elle converge simplement.

Remarque :
On peut définir aussi la convergence de la série de fonctions $\Sigma\ u_n$ sur tout segment de I.

Méthodes pour étudier la convergence uniforme d'une série de fonctions :
1°) Si on peut calculer S(x), puis $R_n(x)$ (par télescopage ou série géométrique) , alors :
• Soit on majore $| R_n(x) |$ par une quantité ne dépendant pas de x et tendant vers 0. Dans ce cas la convergence est uniforme.
• Soit on minore $| R_n(x) |$ par une quantité ne dépendant pas de x et ne tendant pas vers 0. Dans ce cas la convergence n'est pas uniforme.
2°) On peut aussi utiliser le théorème des séries alternées. Alors : $| R_n(x) | \leq | u_{n+1}(x) | \leq | u_n(x) |$. D'où : $\forall\ n \in\ N, 0 \leq \sup_{x\in I} | R_n(x) | \leq \sup_{x\in I} | u_n(x) |$. Donc :
• Soit $\sup_{x\in I} | u_n(x) |$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et dans ce cas la convergence est uniforme.
• Soit $\sup_{x\in I} | u_n(x) |$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini et le cas est douteux.
3°) Si la série est toujours positive, on peut minorer le reste par $u_{n+1}(x)$ et si $\sup_{x\in I} u_{n+1}(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini alors la convergence n'est pas uniforme.
4°) Dans certains cas, on peut encadrer $R_n(x)$ par deux intégrales.

Définition :
Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n : I \to K$. On dit que la série de fonctions Σu_n converge normalement sur I si et seulement si la série réelle positive $\Sigma \| u_n \|_\infty$ converge.

Remarque :
On peut aussi définir la convergence normale sur tout segment de I.

Remarque : (Série majorante convergente)
Si on trouve $\forall n$ un majorant β_n de $| u_n(x) |$, c'est-à-dire $\forall n, \forall x \in I, | u_n(x) | \leq \beta_n$ (indépendant de x) et si la série $\Sigma \beta_n$ converge, alors la série Σu_n converge normalement.

Propriété :
Si la série de fonctions Σu_n converge normalement, alors :
1°) $\forall x \in I$, la série $\Sigma u_n(x)$ converge absolument.
2°) lé série de fonctions Σu_n converge uniformément.

Remarque :
(Σu_n converge normalement) => (Σu_n converge uniformément)
(Σu_n converge normalement sur tout segment) => (Σu_n converge uniformément sur tout segment)
(Σu_n converge uniformément sur tout segment) => (Σu_n converge simplement)

II – Continuité – Intégration – dérivation des séries de fonctions :

Propriété : (Continuité en un point)
Si $\forall n$ $u_n : I \to K$ est continue en un point $x_0 \in I$ et si la série de fonctions Σu_n converge uniformément sur I, alors : La fonction somme S est continue en x_0.

Propriété : (Continuité sur I)
Si $\forall n$ $u_n : I \to K$ est continue sur I et si la série de fonctions Σu_n converge uniformément sur I, alors : La fonction somme S est continue sur I.

Remarque :
Le résultat se généralise si la convergence n'est qu'uniforme sur tout segment de I.

Conséquence :
Si $\forall n$ u_n est continue, si Σu_n converge simplement sur I et si la somme S n'est pas continue sur I.
Alors la convergence n'est pas uniforme ni même uniforme sur tout segment.

Méthodes pour trouver une limite ou un équivalent de S aux limites de I :
1°) On peut essayer de montrer que S est équivalent au 1^{er} terme si la convergence est très rapide.
2°) On encadre S(x) par 2 intégrales.
3°) On essaie d'encadrer $\forall n$ $u_n(x)$ de manière à en déduire un encadrement de S(x) par 2 sommes que l'on sait calculer (souvent géométriques)
4°) On essaie de faire un "pari" : trouver une série dont on sache calculer la somme et telle qu'elle ne soit "pas trop loin" de la série initiale…

Propriété : (Intégration sur un segment)
Si $\forall$ n , u_n : [a,b]$\rightarrow$K est continue. Si la série de fonctions Σ u_n converge uniformément sur [a,b] de somme S. Alors :

1°) S est continue sur [a,b]

2°) La série numérique $\Sigma \int_a^b u_n(x).dx$ converge

3°) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x).dx = \int_a^b S(x).dx$

On parle de "théorème d'intégration terme à termes" de la série de fonctions Σ u_n sur [a,b].

Remarque :
Il y a aussi 2 théorèmes d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque.

Propriété :
Si $\forall$ n , u_n : I$\rightarrow$K est de classe C^1. Si la série de fonctions Σ u_n converge simplement sur I de somme S et si la série de fontions Σ u_n' converge uniformément (ou uniformément sur tout segment).Alors :

S est de classe C^1 et $\forall$ x $\in$ I, S ' (x) = $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

© Archi 2001
http://www.prepasciences.com